数値計算：例題

次の 4 次の正方行列

$$A_4 = \left[\begin{array}{cccc} -3 & -6 & -3 & 9 \\ 2 & 6 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

の LU 分解 $A_4 = L_4U_4$ を求めよ。ただし $L_4$ の対角要素の値を 1 とする。

# 解答

先ず、以下の下三角行列 $L_4$ と上三角行列 $U_4$ で、$A_4$ が LU 分解出来るとする。すなわち、

$$L_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{array}\right]$$

$$U_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \hline 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{array}\right]$$

$$A_4 = L_4U_4$$

が成り立つとする。ここに、$L_4$ と $U_4$ の実線で区切った右下の 3 行 3 列の行列を各々$L_3, U_3$ と書く事にする。

この時、$L_4U_4$ の 1 行と 1 列を各々計算することで、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} u_{11} = -3, u_{12} = -6, u_{13} = -3, u_{14} = 9 \\ u_{11}l_{21} = 2, u_{11}l_{31} = 1, u_{11}l_{41} = -2 \\ l_{21} = -\frac{2}{3}, l_{31} = -\frac{1}{3}, l_{41} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

従って、下三角行列 $L_4$ の 1 列目は

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

となり、上三角行列 $U_4$ の 1 行目は

$$\left[\begin{array}{cccc} -3 & -6 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

と求まる。

$$A_4 = L_4U_4$$

において、実線で区切った右下の 3 行 3 列の行列の成分は

$$\begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} + L_3 U_3$$

となるから、これと $A_4$ の成分を比べる事により

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} + L_3 U_3$$

$$\begin{aligned} A_3 = L_3 U_3 &= -\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -8 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

次に、同様の手順を用いて $A_3$ を LU 分解する

$$A_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline l_{32} & 1 & 0 \\ l_{42} & l_{43} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & u_{44} \end{array}\right]$$

$A_4$ の場合と同様にして、以下の成分が求まる。

$$\begin{aligned} u_{22} = 2, u_{23} = -2, u_{24} = -2 \\ l_{32} = \frac{1}{2}, l_{42} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

同じく実線の右下の行列の成分を計算することにより

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{32} \\ l_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{23} & u_{24} \end{bmatrix} + L_2 U_2$$

これから

$$L_2 U_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

が得られる。

最後に

$$L_2 U_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{14} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

から、

$$\begin{aligned} u_{33} = 3, u_{34} = 4, u_{44} = -\frac{2}{3} \\ l_{14} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

が得られて、$L_4, U_4$ の全ての要素が求まる。
まとめると

$$
\begin{aligned}
L_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \\
U_4 &= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となり、実際に、

$$A_4 = L_4 U_4$$

が成立することが分かる。